# Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 7 (II/III)

## Inhaltsverzeichnis



Stand: 10.12.2021

# Potenzen

## 1 Allgemeines

| | | |
|---|---|---|
| Potenzen mit negativer Basis | Ist der Exponent …<br>• eine gerade Zahl, so ist der Potenzwert positiv.<br>• eine ungerade Zahl, so ist der Potenzwert negativ. | Beispiele:<br>• $(-3)^4 = 81$<br>Achtung:<br>$-3^4 = -(3^4) = -81$<br>• $(-3)^3 = -27$ |
| Potenzen mit dem Exponenten Null | $a^0 = 1$<br>$0^0$ ist nicht definiert | Beispiele:<br>• $5^0 = 1$<br>• $(-3{,}5)^0 = 1$ |
| Potenzen mit negativem Exponenten | | Beispiele:<br>• $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$<br>• $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ |

## 2 Potenzgesetze

| | | |
|---|---|---|
| Potenzen mit gleicher Basis multiplizieren und dividieren | • $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$<br>• $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$ | Beispiele:<br>• $3^3 \cdot 3^4 = 3^{3+4} = 3^7$<br>• $3^4 \cdot 3^{-6} = 3^{4+(-6)} = 3^{-2}$<br>• $5^7 : 5^5 = 5^{7-5} = 5^2$<br>• $5^6 : 5^9 = 5^{6-9} = 5^{-3}$ |
| Potenzen mit gleichem Exponenten multiplizieren und dividieren | • $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$<br>• $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ | Beispiele:<br>• $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$<br>• $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5$<br>• $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$<br>• $\frac{2^4}{6^4} = \left(\frac{2}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$ |
| Potenzen potenzieren | • $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ | Beispiel:<br>• $(4^4)^3 = 4^{4 \cdot 3} = 4^{12}$ |

## 3 Vorsilben

| Vorsilbe | Zehnerpotenz | Zahlwort | Zahl |
|---|---|---|---|
| Exa | $10^{18}$ | Trillion | 1 000 000 000 000 000 000 |
| Peta | $10^{15}$ | Billiarde | 1 000 000 000 000 000 |
| **Tera** | $10^{12}$ | Billion | 1 000 000 000 000 |
| **Giga** | $10^{9}$ | Milliarde | 1 000 000 000 |
| **Mega** | $10^{6}$ | Million | 1 000 000 |
| **Kilo** | $10^{3}$ | Tausend | 1 000 |
| **Hekto** | $10^{2}$ | Hundert | 100 |
| Deka | $10^{1}$ | Zehn | 10 |
| – | $10^{0}$ | Eins | 1 |
| **Dezi** | $10^{-1}$ | Zehntel | 0,1 |
| **Zenti** | $10^{-2}$ | Hundertstel | 0,01 |
| **Milli** | $10^{-3}$ | Tausendstel | 0,001 |
| **Mikro** | $10^{-6}$ | Millionstel | 0,000 001 |
| **Nano** | $10^{-9}$ | Milliardstel | 0,000 000 001 |
| Piko | $10^{-12}$ | Billionstel | 0,000 000 000 001 |
| Femto | $10^{-15}$ | Billiardstel | 0,000 000 000 000 001 |
| Atto | $10^{-18}$ | Trillionstel | 0,000 000 000 000 000 001 |

Anwendungsbeispiele:

- $0{,}00007 = 7 \cdot 0{,}00001 = 7 \cdot 10^{-5}$
- Dicke der Haut einer Seifenblase: $0{,}8\,\text{Mikrometer} = 0{,}8 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 0{,}0000008\,\text{m}$
- Entfernung der Sonne von der Erde: $150\,\text{Millionen Kilometer} = 150 \cdot 10^{6}\,\text{km} = 150000000\,\text{km}$

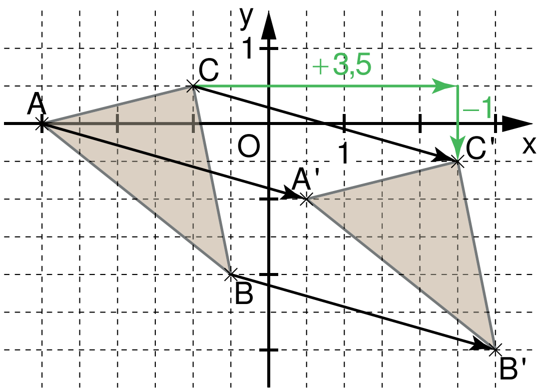
# Parallelverschiebung

## 1 Die Parallelverschiebung und deren Eigenschaften

**Eigenschaften:** $P \xmapsto{\vec{v}} P'$

- Durch Urpunkte und zugehörige Bildpunkte werden Pfeile festgelegt, die parallel, gleich lang und gleich orientiert sind.
  Die Pfeilmenge, die sie bilden, heißt **Vektor** $\vec{v}$.
- Die Parallelverschiebung ist umkehrbar.
- Sie ist längen-, geraden-, winkel-, parallelen- und kreistreu.
- Ur- und zugehörige Bildstrecken sind parallel. Dies gilt entsprechend für Ur- und zugehörige Bildgeraden.
- Die Parallelverschiebung besitzt keinen Fixpunkt.
- Alle Geraden, die parallel zu den Verschiebungspfeilen verlaufen, sind Fixgeraden.
- Die Parallelverschiebung ist eine **Kongruenzabbildung**.

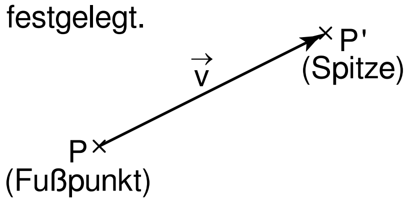
Beispiel: $\Delta ABC \xmapsto{\vec{v}=\begin{pmatrix}3{,}5\\-1\end{pmatrix}} \Delta A'B'C'$ mit $A(-3|0), B(-0{,}5|-2)$ und $C(-1|0{,}5)$



## 2 Vektoren

Die Koordinaten des Pfeils $\overrightarrow{PP'}$ und damit des zugehörigen Vektors $\vec{v}$ werden durch die Koordinaten des Fußpunktes $P(x|y)$ und der Spitze $P'(x'|y')$ festgelegt.

Man berechnet sie nach der Regel „Spitze minus Fuß“:




$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$$

Beispiel: $P(1{,}5|-3)$ und $P'(5|-4) \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 5-1{,}5 \\ -4-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

## 3 Umkehrabbildung

Eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v}$ kann mit dem Gegenvektor $\vec{v^*}$ umgekehrt werden.

$$P \xmapsto{\vec{v}} P'; \; P' \xmapsto{\vec{v^*}} P$$

Für den Gegenvektor $\vec{v^*}$ gilt: $\vec{v^*} = \begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}$.

Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; Gegenvektor $\vec{v^*} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

## 4 Berechnung von Punktkoordinaten

Beispiel: Berechnung der Koordinaten des Bildpunktes $A'$ bei der Abbildung

$$A(4|1) \xmapsto{\vec{v} = \binom{2}{3}} A'(x'|y').$$

1. Möglichkeit: Abbildungsvorschrift

Allgemein: $A(x|y) \xmapsto{\vec{v} = \binom{x_v}{y_v}} A'(x+x_v|y+y_v)$

Beispiel: $A(4|1) \xmapsto{\vec{v} = \binom{2}{3}} A'(4+2|1+3) \Rightarrow A'(6|4)$

2. Möglichkeit: Koordinatenvergleich

Allgemein: $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-4 \\ y'-1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 = x'-4$ und $3 = y'-1$

$\Leftrightarrow x' = 6$ und $y' = 4 \qquad \Rightarrow A'(6|4)$

## 5 Berechnung der Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke

Allgemein: $A(x_A \mid y_A); B(x_B \mid y_B)$

$$M(x_M \mid y_M) = M\left(\frac{x_A + x_B}{2} \,\middle|\, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Beispiel: $A(-2 \mid 1); B(3 \mid 4)$

$$M\left(\frac{-2+3}{2} \,\middle|\, \frac{1+4}{2}\right) = M(0{,}5 \mid 2{,}5)$$

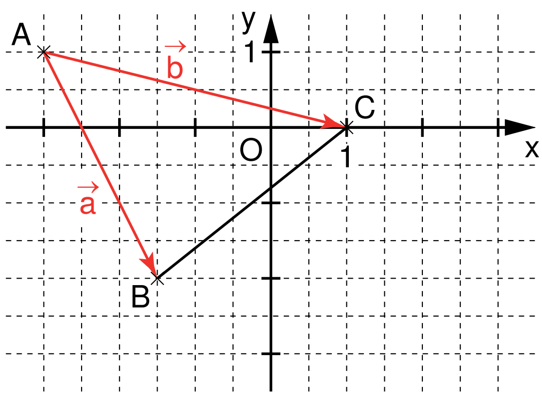
## 6 Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken und Vierecken

### 6.1 Dreiecke

Allgemein:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} \text{FE} = \frac{1}{2} \cdot (x_a y_b - x_b y_b)\,\text{FE}$$




Beispiel:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1{,}5 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \text{FE} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1{,}5 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3))\,\text{FE} \\ &= 5{,}25\,\text{FE} \end{aligned}$$

Bei der Bildung der Determinante ist zu beachten:

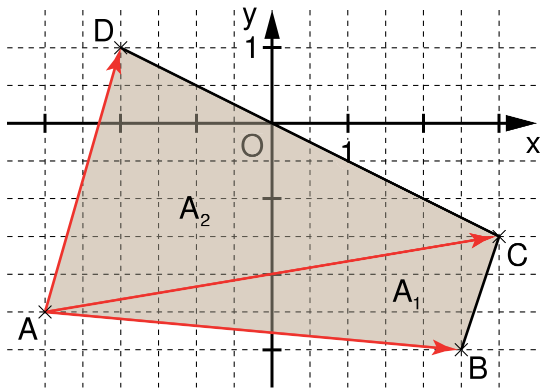
- Beide Pfeile müssen den gleichen Fußpunkt haben.
- Der Pfeil, der gegen den Uhrzeigersinn über die Fläche in Richtung des anderen Pfeils gedreht werden kann, steht an erster Stelle.

### 6.2 Vierecke

Jedes Viereck kann in zwei Dreiecke zerlegt werden.

Für den gesamten Flächeninhalt A gilt:

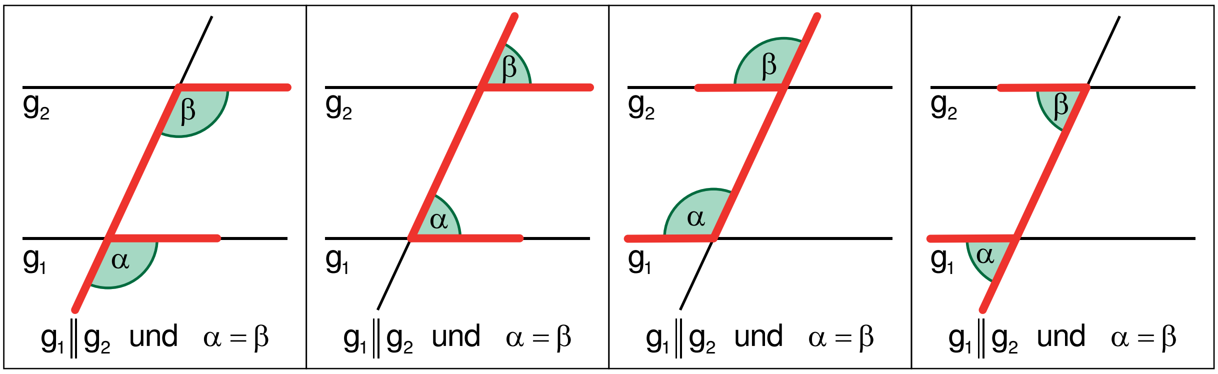
$A = A_1 + A_2$.



# 7 Winkelmaße an parallelen Geraden

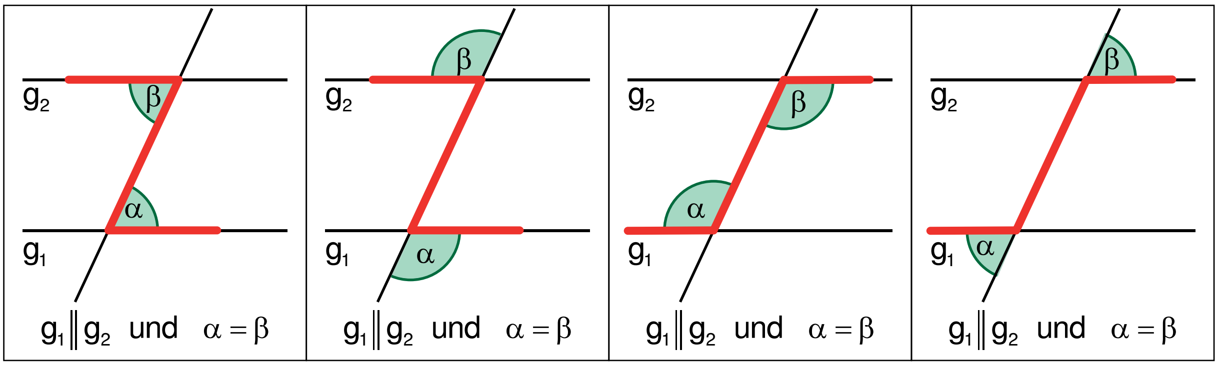
## 7.1 Stufenwinkel

An zwei parallelen Geraden $g_1$ und $g_2$, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, haben Stufenwinkel (F-Winkel) gleiches Maß.



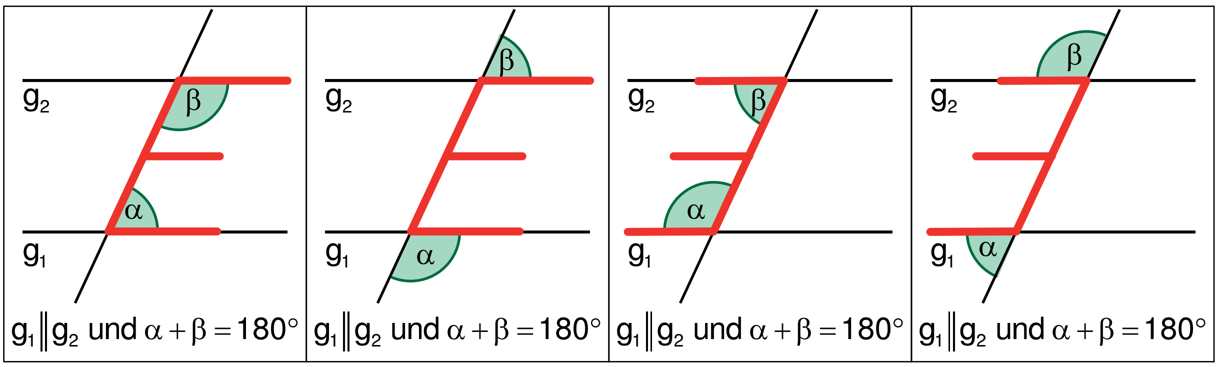

## 7.2 Wechselwinkel

An zwei parallelen Geraden $g_1$ und $g_2$, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, haben Wechselwinkel (Z-Winkel) gleiches Maß.




## 7.3 Ergänzungswinkel

An zwei parallelen Geraden $g_1$ und $g_2$, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, ergeben die Maße von Ergänzungswinkeln (E-Winkel) zusammen 180°.

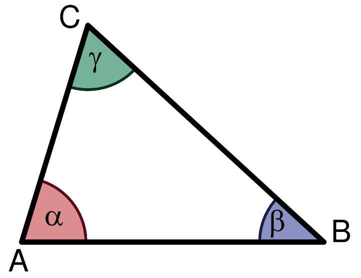



**Umkehrung**: Zwei Geraden sind parallel, wenn entsprechende Winkelbeziehungen gelten.

## 8 Summe der Innenwinkelmaße im Dreieck und im Viereck

In jedem **Dreieck** beträgt die Summe der Innenwinkelmaße 180°:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.




In jedem **Viereck** beträgt die Summe der Innenwinkelmaße 360°.

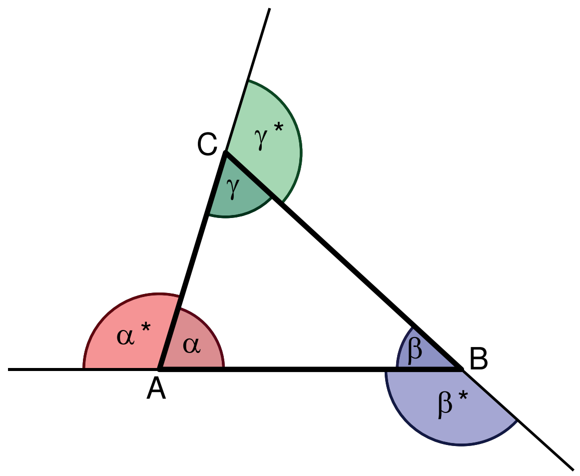
## 9 Außenwinkelsatz im Dreieck

Beim Dreieck nennt man den Nebenwinkel eines Innenwinkels auch Außenwinkel.

Dabei gilt: $\alpha + \alpha^* = 180°$.

Das Maß eines Außenwinkels ist gleich der Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel:

$\alpha^* = \beta + \gamma$; $\beta^* = \alpha + \gamma$; $\gamma^* = \alpha + \beta$.



# Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

Alle Punkte eines geometrischen Ortes haben die gleiche geometrische Eigenschaft.

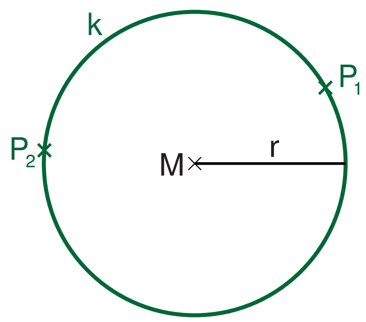
## 1 Geometrische Ortslinien

a) bezüglich Punkten:

**Kreislinie k:**

Alle Punkte $P_n$ haben die gleiche Entfernung von einem Punkt M.

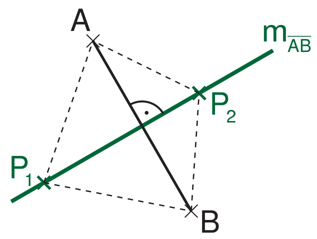
$\left|\overline{P_nM}\right| = r$




**Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$:**

Alle Punkte $P_n$ haben die gleiche Entfernung von den Punkten A und B.

$\left|\overline{AP_n}\right| = \left|\overline{BP_n}\right|$

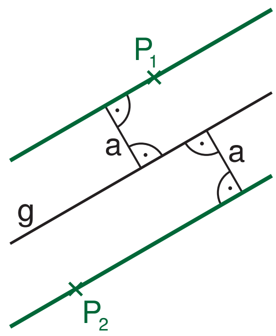



b) bezüglich Geraden oder Strecken:

**Parallelenpaar:**

Alle Punkte $P_n$ haben den gleichen Abstand von der Geraden g.

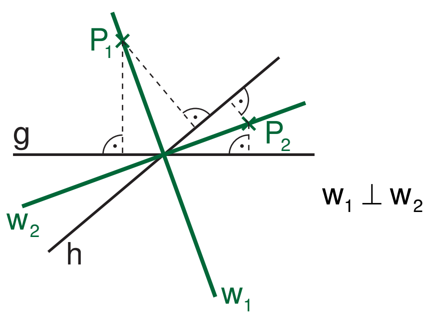
$d(P_n;g) = a$




**Winkelhalbierende $w_1$ und $w_2$:**

Alle Punkte $P_n$ haben den gleichen Abstand von zwei sich schneidenden Geraden g und h.

$d(P_n;g) = d(P_n;h)$

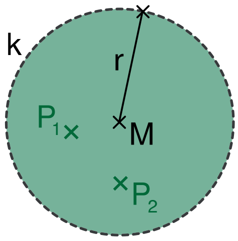


## 2 Ortsbereiche

**Kreisinneres:**

Die Entfernung der Punkte $P_n$ vom Mittelpunkt M ist geringer als der Radius.

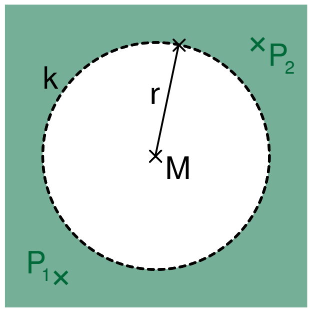
$\left|\overline{MP_n}\right| < r$




**Kreisäußeres:**

Die Entfernung der Punkte $P_n$ vom Mittelpunkt M ist größer als der Radius.

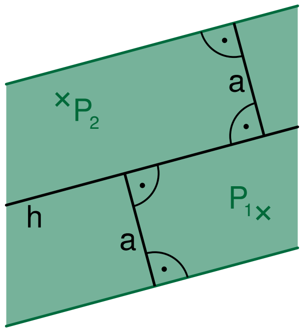
$\left|\overline{MP_n}\right| > r$




**Streifen:**

Alle Punkte $P_n$ sind höchstens a LE von h entfernt.

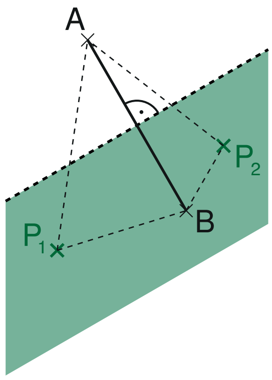
$d(P_n;h) \leq a$




**Halbebene:**

Die Entfernung der Punkte $P_n$ von A ist größer als die Entfernung der Punkte $P_n$ von B.

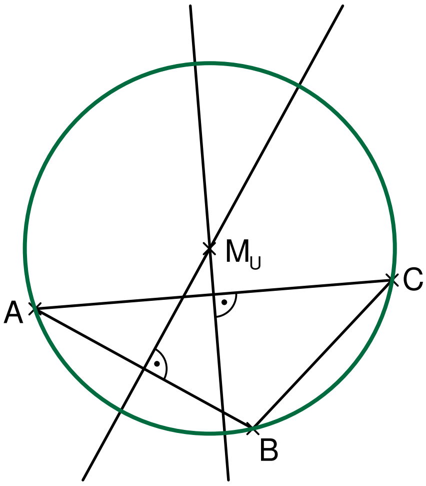
$\left|\overline{AP_n}\right| > \left|\overline{BP_n}\right|$



## 3 Geometrische Orte beim Dreieck

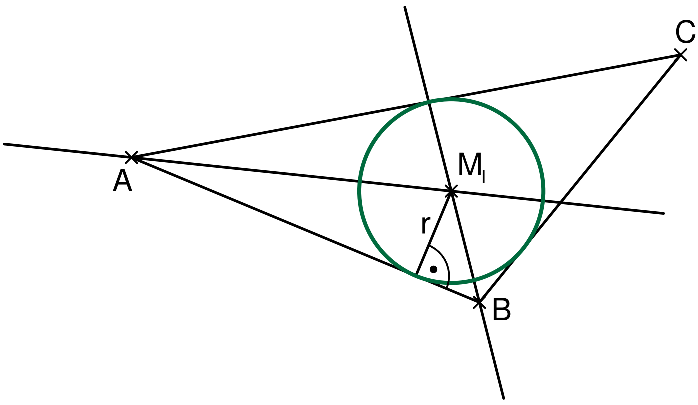
**Umkreis des Dreiecks:**

Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt $M_U$ des Umkreises.




**Inkreis des Dreiecks:**

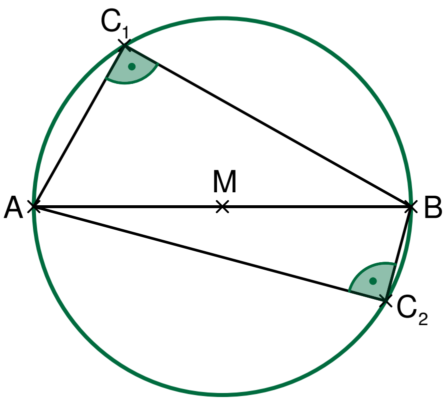
Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt $M_I$ des Inkreises.




**Thaleskreis:**

Jeder Punkt $C_n$ auf einem Kreis um den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ legt mit den Punkten A und B einen rechten Winkel fest.

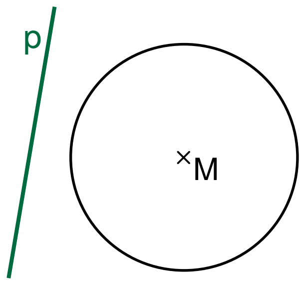
Es gilt: $\sphericalangle AC_1B = 90°$; $\sphericalangle BC_2A = 90°$.



## 4 Gerade und Kreis

**Passante:**

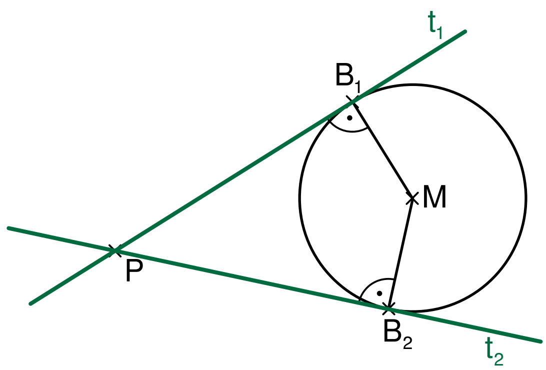
Die Gerade p und der Kreis haben **keinen** gemeinsamen Punkt.




**Tangenten:**

Die Tangenten $t_1$ und $t_2$ haben mit der Kreislinie jeweils **genau einen** Berührpunkt gemeinsam.

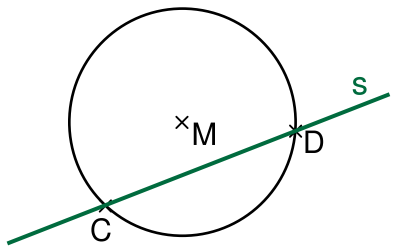
Jede Tangente an einen Kreis steht im Berührpunkt senkrecht auf dem „Berührradius“.




**Sekante:**

Die Gerade s hat mit der Kreislinie **zwei** Punkte gemeinsam.

Die Strecke $\overline{CD}$ heißt **Sehne**.



# Terme, Gleichungen und Ungleichungen

## 1 Vereinfachen von Termen

Die Zahl, mit der eine Variable multipliziert wird, heißt Koeffizient.

Terme, die sich nur in den Koeffizienten (Zahlfaktoren) vor den Variablen unterscheiden, nennt man **gleichartige** Terme. Gleichartige Terme kann man durch Addieren der Koeffizienten zusammenfassen.

Es ist erlaubt, die Multiplikationszeichen zwischen dem Koeffizienten und der Variablen wegzulassen.

Beispiele:

- $5x + 3x = (5+3)x = 8x$
- $5x^2 + 3x + 2x^2 = 7x^2 + 3x$
- $0{,}5a^3 - 6a - 7{,}3a^3 + 1{,}2a^2 - 3a = 0{,}5a^3 - 7{,}3a^3 + 1{,}2a^2 - 6a - 3a = -6{,}8a^3 + 1{,}2a^2 - 9a$

Bei der Multiplikation von Termen können die Potenzgesetze angewendet werden.

Beispiele:

- $5x \cdot x^3 \cdot x^2 = 5x^6$
- $(4x)^2 = 16x^2$

## 2 Gleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $ax + b = c$ ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch sie dividiert.

Beispiele $(G = \mathbb{Q})$:

1)
$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{3}x - 5 = -7 && \mid +5 \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{3}x = -2 && \mid : \tfrac{1}{3} \quad \text{besser } \mid \cdot 3 \\ \Leftrightarrow\ & x = -6 && \end{aligned}$$

$L = \{-6\}$

2)
$$\begin{aligned} & 5x + 6 - 7x = -9 + 3 \cdot 4 && \\ \Leftrightarrow\ & -2x + 6 = 3 && \mid -6 \\ \Leftrightarrow\ & -2x = -3 && \mid :(-2) \\ \Leftrightarrow\ & x = 1{,}5 && \end{aligned}$$

$L = \{1{,}5\}$

## 3 Ungleichungen

Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl multipliziert oder durch sie dividiert,
- beide Seiten mit der gleichen negativen Zahl multipliziert oder durch sie dividiert und das Ungleichheitszeichen umkehrt (**Inversionsgesetz**).

Beispiele $(G = \mathbb{Q})$:

1) $6x \geq -27 \quad | :6$

$\Leftrightarrow \quad x \geq -4{,}5$

$L = \{x \mid x \geq -4{,}5\} = [-4{,}5; \infty[$

lies: „Die Mengen aller x, für die gilt: x ist größer oder gleich $-4{,}5$."

2) $-2x < 14 \quad | :(-2)$

$\Leftrightarrow \quad x > -7$ **Inversionsgesetz!**

$L = \{x \mid x > -7\} = ]-7; \infty[$

3) $-\frac{1}{4}x + 5 \geq -3 \quad | -5$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}x \geq -8 \quad \left| :\left(-\frac{1}{4}\right)\right.$ bzw. $| \cdot (-4)$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 32$ **Inversionsgesetz!**

$L = \{x \mid x \leq 32\} = ]-\infty; 32]$

Die Lösungsmenge ist jeweils in Mengen- und Intervallschreibweise angegeben.

# Proportionalitäten

## 1 Prozentrechnung

**Vermehrter Grundwert**: Der vermehrte Grundwert entspricht dem Prozentwert, der sich aus einer Vermehrung des Grundwerts ergibt.

Beispiel: Das neue Gehalt beträgt nach einer 5 %-igen Erhöhung 2710,05 €.
Wie hoch war das ursprüngliche Gehalt?

Vermehrter Grundwert: $2710{,}05\,€ \mathrel{\widehat{=}} 105\,\%$

$$\begin{array}{rcl} & 2710{,}05\,€ \mathrel{\widehat{=}} 105\,\% & \\ :21 & \downarrow & :21 \\ & 129{,}05\,€ \mathrel{\widehat{=}} 5\,\% & \\ \cdot 20 & \downarrow & \cdot 20 \\ & 2581{,}00\,€ \mathrel{\widehat{=}} 100\,\% & \end{array}$$

Grundwert: $2581{,}00\,€ \mathrel{\widehat{=}} 100\,\%$

**Verminderter Grundwert**: Der verminderte Grundwert entspricht dem Prozentwert, der sich aus einer Verminderung des Grundwerts ergibt.

Beispiel: Auf einen Kaufpreis gibt es im Werksverkauf einen Nachlass von 20 %. Der Artikel kostet nun noch 75 €.
Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

Verminderter Grundwert: $75{,}00\,€ \mathrel{\widehat{=}} 80\,\%$

$$\begin{array}{rcl} & 75{,}00\,€ \mathrel{\widehat{=}} 80\,\% & \\ :4 & \downarrow & :4 \\ & 18{,}75\,€ \mathrel{\widehat{=}} 20\,\% & \\ \cdot 5 & \downarrow & \cdot 5 \\ & 93{,}75\,€ \mathrel{\widehat{=}} 100\,\% & \end{array}$$

Grundwert: $93{,}75\,€ \mathrel{\widehat{=}} 100\,\%$

## 2 Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Unter Zinsen versteht man den Geldbetrag, den man nach einer bestimmten Zeit für geliehenes Geld bezahlen muss oder für verliehenes Geld bekommt.

Es entsprechen sich:

| Prozentwert (PW) | Prozentsatz (p) | Grundwert (GW) |
|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ |
| **Zinsen (Z)** | **Zinssatz (p)** | **Kapital (K)** |

Quotientengleichheit: $\frac{p}{100} = \frac{Z}{K}$

Alle Berechnungen können wie beim Prozentrechnen z. B. über eine Verhältnisgleichung oder den Dreisatz durchgeführt werden. Die so berechneten Zinsen Z beziehen sich auf ein Jahr (Jahreszins).

### 2.1 Berechnung der Zinsen

Beispiel: Auf einem Sparbuch, für das eine Verzinsung von 3,75 % gilt, sind 940,00 €. Wie hoch sind die Zinsen?

| Lösung mit einer Verhältnisgleichung | Lösung mit Dreisatz |
|---|---|
| $\frac{3{,}75}{100} = \frac{Z}{940\text{ €}}$<br><br>$Z = \frac{3{,}75 \cdot 940\text{ €}}{100} = 35{,}25\text{ €}$ | 940,00 € ≙ 100 %<br>:100 ↓ 9,40 € ≙ 1 % ↓ :100<br>·3,75 ↓ 35,25 € ≙ 3,75 % ↓ ·3,75 |

Die Zinsen betragen 35,25 €.

## 2.2 Berechnung des Zinssatzes

Beispiel: Bei einer Bank mussten für Überziehung des Kontos um 650 € Zinsen in Höhe von 26 € gezahlt werden.
Wie hoch war der Zinssatz?

| Lösung mit einer Verhältnisgleichung | Lösung mit Dreisatz |
| --- | --- |
| $\frac{p}{100}=\frac{26}{650}$ <br> $p=\frac{26\cdot 100}{650}=4$ | $\begin{array}{lcr} & 650\text{ €} \triangleq 100\,\% & \\ :50 & & :50 \\ & 13\text{ €} \triangleq 2\,\% & \\ \cdot 2 & & \cdot 2 \\ & 26\text{ €} \triangleq 4\,\% & \end{array}$ |

Für den Zinssatz gilt: p = 4.

## 2.3 Berechnung des Kapitals

Beispiel: 117 €, das sind 5 % des gesamten Kapitals, gab es bei der Ausschüttung eines Aktienfonds.
Wie viel Kapital enthält der Fond?

| Lösung mit einer Verhältnisgleichung | Lösung mit Dreisatz |
| --- | --- |
| $\frac{K}{117\text{ €}}=\frac{100}{5}$ <br> $K=\frac{100\cdot 117\text{ €}}{5}=2340\text{ €}$ | $\begin{array}{lcr} & 117{,}00\text{ €} \triangleq 5\,\% & \\ :5 & & :5 \\ & 23{,}40\text{ €} \triangleq 1\,\% & \\ \cdot 100 & & \cdot 100 \\ & 2340{,}00\text{ €} \triangleq 100\,\% & \end{array}$ |

Der Aktienfond hat ein Kapital von 2340 €.

## 3 Indirekte Proportionalität

Entspricht bei einer Zuordnung von Größen das n-fache der einen Größe dem n-ten Teil der anderen Größe, so heißt diese Zuordnung indirekte Proportionalität.

Sprechweise: „Die beiden Größen sind indirekt proportional zueinander."

Beispiel: Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 24 cm². Wenn $x \in \mathbb{Q}^+$ und $y \in \mathbb{Q}^+$ gilt, ist dies für unendlich viele Rechtecke verschiedener Längen x cm und Breiten y cm möglich.

·12

·2 ·3

| Länge x cm | 1 | 2 | 3 | 4,5 | 6 | 8 | 10 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Breite y cm | 24 | 12 | 8 | $5\frac{1}{3}$ | 4 | 3 | 2,4 | 1 |

:2 :3

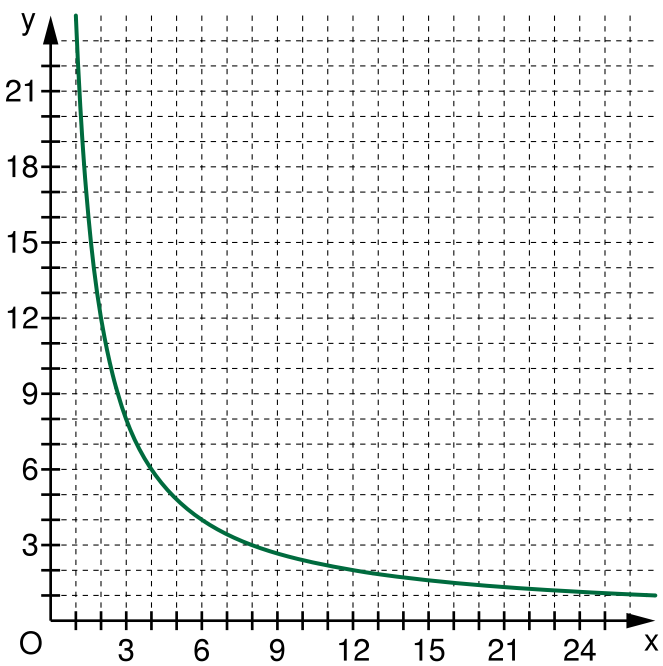
:12

Alle Zahlenpaare $(x|y)$ einer indirekten Proportionalität sind produktgleich.

Beispiel: $x \cdot y = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 5\frac{1}{3} = 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 10 \cdot 2{,}4 = 24 \cdot 1$

Die graphische Darstellung einer indirekten Proportionalität ist ein **Hyperbelast** ($x \in \mathbb{Q}^+$ und $y \in \mathbb{Q}^+$).

Beispiel:



Beispiel: Zwei Teermaschinen benötigen 3,5 Stunden für das Aufbringen einer neuen Teerschicht auf einem Autobahnabschnitt von 1,5 km Länge.
Wie lange würden drei Teermaschinen dafür brauchen?

<table>
<tr><th>Lösung mithilfe der Produktgleichheit</th><th>Lösung mit Dreisatz</th></tr>
<tr><td>

| Maschinen | 2 | 3 |
|---|---|---|
| Zeit in h | 3,5 | y |

$$2 \cdot 3{,}5 = 3 \cdot y$$

$$y = \frac{2 \cdot 3{,}5}{3} = 2\frac{1}{3}$$

</td><td>

$$\begin{array}{lrcll} & 2\text{ Maschinen} & \mathrel{\hat{=}} & 3{,}5\text{ h} & \\ :2 \downarrow & 1\text{ Maschinen} & \mathrel{\hat{=}} & 7\text{ h} & \downarrow \cdot 2 \\ \cdot 3 \downarrow & 3\text{ Maschinen} & \mathrel{\hat{=}} & 2\frac{1}{3}\text{ h} & \downarrow :3 \end{array}$$

</td></tr>
</table>

Drei Teermaschinen würden 2 Stunden und 20 Minuten benötigen.

# Auswertung von Daten

## 1 Statistische Kenngrößen

Statistische Kenngrößen sind wichtige Werte für die Analyse von Daten:

- **Modalwert**: Wert, der am häufigsten auftritt
- **arithmetisches Mittel**: der Durchschnitt, d. h. $\frac{\text{Summe aller Datenwerte}}{\text{Anzahl der Datenwerte}}$
- **Zentralwert**: Wert, der in der Mitte der geordneten Datenreihe liegt.
- **Spannweite**: Differenz aus dem größten (**Maximum**) und kleinsten (**Minimum**) Wert einer Datenreihe

Beispiel: In der Tabelle sind die Körpergrößen von Schülerinnen und Schüler einer Klasse zusammengestellt.

| Name | Körpergröße | Name | Körpergröße |
|---|---|---|---|
| Murat | 162 cm | Jennifer | 163 cm |
| Nadine | 151 cm | Claudia | 167 cm |
| Florian | 153 cm | Tobias | 165 cm |
| Anna | 165 cm | Michael | 160 cm |
| Thomas | 149 cm | Delia | 149 cm |
| Silke | 163 cm | Markus | 153 cm |
| Christoph | 170 cm | Sergej | 165 cm |
| Sibylle | 164 cm | | |

**Spannweite**: $170\,\text{cm} - 149\,\text{cm} = 21\,\text{cm}$

**Modalwert**:
Die Häufigkeitstabelle für die Körpergrößen gibt an, wie oft eine bestimmte Körpergröße vorkommt.

| Körpergröße in cm | 149 | 151 | 153 | 160 | 162 | 163 | 164 | **165** | 167 | 170 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Häufigkeit | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | **3** | 1 | 1 |

Modalwert: 165 cm

**Arithmetisches Mittel**:

$$\frac{(2\cdot 149+151+2\cdot 153+160+162+2\cdot 163+164+3\cdot 165+167+170)}{2+1+2+1+1+2+1+3+1+1}\,\text{cm}$$

$$=\frac{2399}{15}\,\text{cm}$$

$$\approx 159{,}93\,\text{cm}$$

Der Durchschnitt der Körpergrößen beträgt ca. 160 cm.

**Zentralwert**:
Sortiert man die Daten für die Körpergrößen der Größe nach, so ist der Wert, der in der Mitte dieser sortierten Liste steht, der Zentralwert.

Körpergröße in cm:
149 149 151 153 153 160 162 **162** 162 163 163 164 165 167 170

Zentralwert: 162 cm

Der Zentralwert für die Körpergrößen in cm der Jungen ergibt sich aus der geordneten Liste.

Körpergröße in cm:
149 153 153 **160 162** 165 165 170

Den Zentralwert erhält man hier als arithmetisches Mittel aus 160 cm und 162 cm:

$$\frac{160+162}{2}\,\text{cm}=161\,\text{cm}$$

## 2 Repräsentative Stichprobe:

Ist es zu aufwändig, alle Personen einer bestimmten Gruppe zu befragen oder alle Objekte zu zählen, beschränkt man sich auf eine Stichprobe. Stellt diese Stichprobe ein verkleinertes Bild der Gesamtheit dar, das dieser möglichst ähnlich ist, so nennt man sie **repräsentativ**.

Beispiel: Der beliebteste Fußballverein in Deutschland soll durch eine Umfrage ermittelt werden. Eine solche Umfrage ist nicht repräsentativ, wenn die befragten Personen alle aus Nürnberg kommen.